Matemática Discreta
Asignatura optativa de la Licenciatura de Matemáticas (UAM)
Curso 2007-2008

Hoja 1 (Combinatoria)

1. En una clase se imparten 5 asignaturas con dos posibles calificaciones cada una: suspenso y aprobado. Si en la clase hay 70 alumnos, demuéstrese que hay al menos 3 alumnos que han aprobado exactamente las mismas asignaturas.

Solución. Palomas = alumnos, palomares = {asignaturas aprobadas} (hay 2^5 posibilidades, los posibles subconjuntos de $\{1, \ldots, 5\}$).

2. (a) Situamos cinco puntos en un triángulo equilátero de lado 1. Demuéstrese que dos de ellos están a una distancia menor o igual que 1/2.
(b) Compruébese que en un poliedro siempre hay dos caras con el mismo número de lados.

Solución. (a) Dividir el triángulo en 4 triángulos equiláteros de lado 1/2. (b) Sea n el número de lados de la cara con mayor número de lados. Entonces $\#\{caras\} \geq n + 1$.

3. Para promocionar sus magdalenas, la empresa "Irma la dulce" ha decidido premiar a sus consumidores. En cada bolsa de magdalenas incluyen una tarjeta con un código formado por tres símbolos, que pueden ser dígitos (del 0 al 9) o letras (de entre las 27 del alfabeto castellano). La únicas restricciones son que no pueden aparecer letras repetidas y que no pueden aparecer dos letras juntas en el código. Para obtener premio hay que reunir tres tarjetas iguales. ¿Cuántas bolsas de magdalenas tienes que comprar para estar seguro de que vas a lograr el premio?

Solución. 32241.

4. Sea X, $|X| \geq 2$, un conjunto de personas. Demostrar que hay dos que tienen el mismo número de amigos en X.

Solución. Usar que no puede haber simultáneamente en el grupo personas con 0 y $|X| - 1$ amigos.

5. Demuéstrese que en cualquier subconjunto de $n + 1$ elementos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, , 2n\}$ hay un elemento que divide a otro (esta cuestión se debe a Paul Erdös). (*Indicación*: constrúyanse los palomares en función del máximo divisor impar de cada número).

Solución. Construir los palomares en función del máximo divisor impar de cada número.

6. Calcula

a) el número de listas de cinco posiciones formadas con los símbolos del conjunto $\{0, \ldots, 9\}$;
b) el número de formas de ordenar las letras de la palabra LISTA; y de la palabra TANTO;
c) el número de palabras de 5 letras del alfabeto de 27 letras $\{a, \ldots, z\}$ que no tengan dos letras consecutivas iguales;
d) el número de enteros positivos menores que 100000 que contienen al menos un 7.

Solución. (a) 10^5. (b) $5!$ y $\frac{5!}{2}$. (c) $27 \cdot 26^4$. (d) $10^5 - 9^5$.

7. ¿Cuántos números distintos de tres dígitos diferentes se pueden formar usando las cifras $\{1, 2, \ldots, 9\}$? ¿Cuántos de estos son números pares? ¿Y cuántos son menores que 468?

Solución. (a) $9 \cdot 8 \cdot 7$. (b) $7 \cdot 8 \cdot 4$. (c) $3 \cdot 8 \cdot 7 + 4 \cdot 7 + 5$.

8. Calcula el número de formas de colocar 8 objetos *distintos* en un tablero de ajedrez de tal forma que no haya dos en la misma fila ni en la misma columna. ¿De cuántas formas se podrá hacer si los objetos son *idénticos*?

Solución. (a) $(8!)^2$. (b) $8!$.

9. Calcula el número de permutaciones de la palabra ABCDEFG que contengan:

- la secuencia ABC;
- las secuencias AB, CD y EF;
- las secuencias AB, BC y EF.

Solución. (a) $5!$. (b) $4!$. (c) $4!$.

10. Calcula

- el número de funciones de un conjunto de 7 elementos en un conjunto de 10 elementos;
- el número de maneras de distribuir 5 bolas distintas en 8 cajas distintas si en cada caja puede haber como mucho una bola.

Solución. (a) 10^7. (b) $\frac{8!}{3!}$.

11. ¿Cuántos números naturales tienen en su expresión en base 10 todos sus dígitos distintos?

Solución. $9^2 \cdot 8! \left(1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!}\right) \approx 9^2 \cdot 8! \cdot e$.

12. Se forman todas las listas de longitud n con los números $\{1, \ldots, 6\}$. Pruébese que la suma de los números que aparecen en esas listas es par para la mitad de ellas. (*Indicación*: para cada lista, encuéntrese otra tal que una sume par y la otra impar).

Solución. Clasificar las listas en función del número por el que comienzan.

13. Vamos a fabricar tarjetas de identificación poniendo símbolos en las casillas de una matriz 3×3. En las filas pueden repetirse los símbolos, pero los tres de cada columna han de ser distintos. ¿Cuántos símbolos son necesarios si queremos que haya al menos 10^9 tarjetas distintas? (*Indicación*: hágase la cuenta por columnas).

Solución. $n \geq 12$.

14. ¿De cuántas maneras podemos disponer los números $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ en una ruleta giratoria si los números pares y los números impares deben estar alternados? (*Indicación*: fíjese dónde empieza la ruleta).

Solución. n!(n-1)!.

15. En una caja tenemos bolitas rojas, azules, etc. Las hay de n colores distintos, y tantas de cada color como necesitemos. ¿Cuántos collares distintos —de longitud en principio arbitraria— podremos fabricar si exigimos que las cuentas del collar sean de colores distintos?

Solución. $n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{n \cdot 2}$.

16. Hallar el número de capicúas de k cifras. Demostrar que la suma de los inversos de los números capicúas es finita.

Solución. $9 \cdot 10^{\lceil \frac{k}{2} - 1 \rceil}$. Para demostrar que la suma de los inversos es finita, agrupar las sumas de los inversos de los capicúas que tengan la misma longitud.